

**Projet d’Informatique (2A202):**

Etude statique d’une poutre sous compression verticale

*Duvivier Valentin*

Formation cursus master en Ingénierie - 2è année

2018/2019

1. Introduction :

Le métier de génie mécanique est inéluctablement lié à la notion de calcul de structure et de déformation des matériaux et plus spécifiquements à leur résistance.

Dans le cadre de notre recherche, nous chercherons à étudier et à décrire le comportement d’une poutre verticale sur laquelle est appliquée une force. Cette poutre ne subit toutefois pas de déformation mais un simple déplacement oblique , notamment définis par l’angle créé entre la verticale et la poutre (se référer au schéma et à la description qui en est faite).

Pour ce qui est de la sélection du problème, j’ai décidé d’étudier l’aspect statique du problème. Étant en monôme et n’ayant pas suivi l’UE d’informatique de L1 j’ai privilégié une étude statique, mettant en jeu des équations non-linéaires. Même si j’ai envisagé la possibilité d’étudier la partie dynamique du problème, je m’y suis pris un peu tard et je n’aurais sans doute pas pu faire une étude aussi complète que je l’aurai espérer et cela n’aurait abouti qu’a n’en étudier que les prémices.

Pour ce qui est du plan de la recherche, dans un premier temps, nous chercherons à faire une étude théorique de notre système afin de retrouver l’équation de la statique donnée dans le sujet. Puis, à l’aide de la méthode Newton-Raphson nous verrons comment résoudre notre équation non-linéaire et ainsi définir des positions d’équilibres. Enfin, nous exploiterons les données numériques obtenus à l’aide de notre programme et mettrons en lumière le fonctionnement de notre objet d’étude.

Plan :

1. Introduction
2. Mots clés
3. Schéma de notre étude
4. Configuration d’équilibre du système et établissement de notre équation :
   1. Force de rappel semblable à celle d’un ressort
   2. Bilan des forces pour une étude isostatique
5. Résolution d’équation non-linéaires
6. Méthode Newton-Raphson et tracer de courbes :
   * 1. Point d’équilibre
     2. Calcul des valeurs de P et teta selon deux méthodes :
        1. teta initiale
        2. P oblique
   1. Programme :
      1. Explication du programme
      2. Résultats issus du programme
7. Conclusion sur notre étude
8. BIbliographie
9. Mots clés : flambage, équilibre statique, structure isostatique, contraintes internes, méthode de Newton-Raphson, fonction récursive, force de ressort.
10. Schéma :

IV. Configuration d’équilibre du système et établissement de notre équation :

Nous avons une poutre, sous compression verticale, rattachée au sol par une liaison rotule, et qui ne subit pas de déformation. Notre étude suppose que les déformations sont nulles : on ne considère que des déformations et des déplacements qui restent petits et dans la zone de comportement élastique des matériaux. On supposera donc que les calculs se font à partir de la structure non déformées.

Dans un premier temps nous allons chercher à retrouver l’équation de la statique de la poutre qui est la suivante :

**

avec  l’angle entre l’axe verticale et P la force verticale appliquée sur notre système.

1. Force de rappel semblable à celle d’un ressort :

Une méthode pour étudier la déformation d’une poutre soumise à la contrainte d’une force extérieur peut-être de symboliser notre système par un modèle extérieur. En fait, on peut ici assimiler la liaison entre la poutre et la rotule à un ressort. Pour avoir une confirmation de cette méthode, j’ai décidé de tracer la courbe de l’équation de notre problème. Ainsi, pour un P fixé j’ai tracée la courbe définissant notre système, ce qui m’a permis de retrouver la courbe qui m’avait été donnée dans les données de départ pour la recherche. Cette courbe (fig 1) et sa conception seront étudiées dans la partie programmation.

fig 1

Tracer cette courbe permet d’avoir une idée du comportement de la poutre en fonction du déplacement. Ainsi, cette courbe m’a permis d’observer que plus l’angle entre la poutre et la verticale est grand, plus la force de rappel est importante. Ainsi, on retrouve un fonctionnement similaire à celui d’un ressort : le mouvement de la poutre est au début facile mais par la suite devient de plus en plus difficile, rendant quasiment impossible tout déplacement au bout d’un certain angle dépassé ; ce qui nous permet de faire cette analogie afin de pouvoir plus facilement caractériser notre système.

On sait donc que notre système est soumis à deux forces : la force P et la force de rappel due à la liaison rotule.

Cette description visuelle du comportement de notre système permet donc de faire le lien entre les forces qui s’appliquent à la poutre et des forces théoriques, simplifiant notre problème. Dans la partie suivante nous allons voir si notre système se résume à ces deux forces.

1. Bilan des forces pour une étude isostatique :

Nous étudions le bilan des forces appliquées sur une poutre verticale. En fait, lorsque la force va être appliquée sur le haut de la poutre, la poutre va simplement se pencher, et non entrer en flexion. Nous n’aborderons donc pas les idées de moment fléchissant et de flambage.

Par ailleurs, il est à noter que nous sommes ici dans un problème plan. Plus précisément, nos conditions d’études (hypothèses sur les déformations, problème plan, liaison rotule) nous permettent de définir que notre problème est *isostatique.* Cela signifie qu’en tout point de notre objet les forces appliquées seront les mêmes et qu’il nous suffit d’appliquer le principe fondamentale de la dynamique à notre problème pour l’étudier. Or, étant donné que nous étudions le cas statique de notre problème on peut en fait n’appliquer que le principe fondamentale de la statique pour étudier les forces s’appliquant sur la poutre.

Cela implique que le PFS suffit à déterminer les inconnues statiques **;** et nous ferons donc la résultante des actions mécaniques sur notre solide afin de chercher à en décrire le comportement, dans le cas statique. Ainsi, nous étudierons les configurations d’équilibre de la poutre, et ce pour différents angles et forces appliqués.

L’application du PFS à notre problème nous permet de définir la relation suivante :



Nous avons ici un bilan qui ne met en jeu que les deux forces exposées précédemment. On retrouve P la force appliquée sur notre système et  l’angle que la poutre fait avec la verticale. La variable P symbolise la force appliquée sur le haut de la poutre tandis que la force  représente la force de ressort oblique lié à la liaison rotule. En effet, nous avons ici  et non pascar la raideur est ici angulaire, faisant intervenir les Moments. Nous avons en effet un déplacement qui se fait en rotation autour de la liaison rotule, laquelle est symbolisé par un système ressort.

En sommes, selon le mode de déformation et le phénomène étudié, ici celui d’une poutre en déplacement oblique, on définit le type de ressort appliqué et ainsi la raideur qui traduit le mieux le comportement du système, ici une raideur angulaire.

Pour ce qui est du bilan des forces, étant donnée que nous avons un problème plan, nous allons avoir des forces sur 2 axes. Cependant, notre étude porte sur les points d’équilibre de la poutre en fonction du déplacement de celle-ci. Ainsi, notre déplacement se faisant sur l’axe x, on projette nos forces sur cet axe. En se référant au repère donné sur le schéma, on retrouve :



Par analogie avec l’équation de départ qui accompagne le sujet, on peut en déduire que l’on a ici k = 1 ; ce qui traduit le fait que pour notre cas la résistance à la déformation élastique d'un corps (ici la poutre) est de l’ordre de 1 et supposé constante. Ce qui correspond bien à notre objet d’étude : une poutre sous compression verticale et ne subissant pas de déformations sinon un simple déplacement.

Pour finir, l’application du PFS nous a permis de retrouver l’équation de la statique de notre poutre. Nous allons désormais exploiter cette relation afin de déterminer des points d’équilibre par la méthode de Newton-Raphson.

IV. Résolution d’équation non-linéaires:

1. Méthode Newton-Raphson et tracer de courbes

Pour réaliser l’étude de notre système, nous faisons la résolution d’une équation algébrique non-linéaire par la méthode de Newton-Raphson qui consiste, à partir d’un nombre initiale et de l’équation de la statique de la poutre, à retrouver un ou plusieurs point(s) d’équilibre du système.

Nous rappelons l’équation :

** ; qui décrit l’étude statique de notre étude.

Les propriétés fondamentales de la méthode Newton-Raphson sont les suivantes :

* convergence quadratique : à chaque itération le résultat gagne en précision ; ainsi on définit le nombre d’itérations en fonction de la précision souhaitée.
* il y a convergence si :
  + la fonction f est C² sur son ensemble de définition ;
  + df(x) ≠ 0 et de signe constant ;

NB : pour appliquer la méthode de Newton-Raphson il faut écrire la fonction sous la forme f(x) = 0 ; pour notre cas on a

f(x) = -x + P\*sin(x) = 0

Notre équation comporte la fonction sinus, ce qui nous permet de déduire qu’elle est au moins C². Pour ce qui est de la dérivée de notre fonction on a :

df(x) = -1 + P\*cos(x)

Ainsi, pour ce qui est du point qui dit que l’on doit avoir df(x) de signe constant, pour notre part, nous voyons que c’est vrai pour un intervalle réduit, qui dans notre cas est l’intervalle .

C’est en effet l’intervalle de définition de la fonction sinus. On retrouve d’ailleurs cet intervalle sur la figure 1, que l’on a abordé tout à l’heure.

En fait, il va y avoir deux choses du au fait que l’on est des fonctions sinus et cosinus dans notre application de la méthode Newton-Raphson :

* notre analyse peut se limiter à celle pour les angles positifs car on va avoir une symétrie au niveau de l’ordonnée (fig 2) ;
* on retrouve le fait que pour notre intervalle considérée on a bien théta qui va varier entre d’un côté, et de l’autre. On retrouve la valeur maximum de théta sur la figure 1 et qui est d’environ 3.1 : nous avons ici la confirmation que c’est bien vers la valeur de PI que tend théta.

Avec la formule de la méthode Newton-Raphson qui est la suivante :

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

on obtient finalement theta (n+1) = theta(n) - ((P\*sin(theta) - theta) / (P\*cos(theta) - 1))

Pour ce qui est de la méthode en elle-même, elle se base sur la linéarisation et la résolution d’équations plus complexes Pour cela, on utilise une méthode d’itération qui donne des résultats précis, à condition de choisir un point de départ assez proche du point de convergence final.

Une des difficultés de cette méthode consiste donc en le choix de notre point initial. La réussite de cette méthode repose en effet sur le fait que l’on doit avoir un point initial qui est assez proche de la valeur d’équilibre.

Néanmoins, il semble que la plage d’application de cette méthode est limité pour notre cas. Nous allons utiliser une réduction de la variable afin de réduire l’intervalle sur lequel nous aurons à définir notre angle initiale. Soit cos(theta) qui appartient à -PI;Pi, nous avons notre étude qui est définie sur cette intervalle. En effet, pour cette intervalle, on a df(x) qui est de signe constant, comme attendu. On devrait donc avoir une valeur max pour theta qui est égale à PI.

* Développement limité :
* D.L de sin(x) avant le calcul de f’(x) ----> x - x³/3! …..
* D.L de sin(x) après le calcul de f’(x) ----> -1 + P\*cos(x)
* Theta initial ou oblique :

Pour initier un mouvement de la part de notre poutre il est nécessaire de répondre à une de ces conditions. En effet, si jamais la poutre était à la verticale et que l’on appliquait une force elle aussi verticale suivant le même axe, la poutre sera compressée et non déplacer suivant l’axe de rotation de la rotule.

Ainsi, il y a deux alternatives qui s’offrent à nous : considérer que la poutre est initialement décalée de l’axe z d’un angle teta, ou bien que la force initiale est oblique, et pousse donc la poutre selon deux directions, l’amenant à se pencher.

Nous chercherons donc à modéliser cette méthode sous la forme d’un programme, qui nous permettra d’étudier le ou les points d’équilibre du système.

Par ailleurs, pour avoir une idée visuelle de ces points d’équilibre, nous allons faire un code qui aura pour but de tracer la variation de la force en fonction de l’angle.

B. Programme :

1. Explication du programme
2. Résultats issus du programme

pourquoi faire un code ? et selon ce que j’ai voulu faire, quel code j’ai mis en place.

Comparaison entre mes résultats numériques et des valeurs réelles, la courbe donnée, ce qui me semble plausible …. : une présentation de quelques résultats issus du code développé comprenant une analyse critique, une discussion et une interprétation des résultats (cf points critiques, stable, angle et force limite).

V. Conclusion sur notre étude :

VI. BIbliographie

[1] Théorie et cours de base <https://www.emse.fr/~badel/12-01-06_COURS_RDM_FULL.pdf>

Méthode de Newton-Raphson

[2] <https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/04_continuite_derivabilite_fonction/04_cours_algorithme_newton.pdf>

Méthode Newton-Raphson :

* <https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton#Pr%C3%A9sentation>
* <https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/04_continuite_derivabilite_fonction/04_cours_algorithme_newton.pdf>
* <http://www.cinam.univ-mrs.fr/klein/teach/mip/numeriq/node25.html>

Site qui aide sur la compréhension du pb et qui aide sur la difficulté avec sinus ; partie de programmes explicitées

* <http://www.math.ubc.ca/~anstee/math104/newtonmethod.pdf>
* <https://www.codewithc.com/c-program-for-newton-raphson-method/>
* <https://www.google.com/search?client=firefox-b-ab&ei=aKD-W4CUJMyGauO0mMAE&q=method+newton+raphson+algorithm&oq=method+newton+raphson+a&gs_l=psy-ab.3.0.35i39j0i22i30l4.274932.288114..289586...0.0..0.142.1854.22j1......0....1..gws-wiz.......0j0i131j0i67j0i20i263j0i203j0i13i5i30j0i8i13i30.U0I7EWBsSKw>

Documents à déposer pour l'évaluation des mini-projets, au plus tard le 20 décembre minuit:

1. Le rapport de synthèse (voir plus bas les instructions)
2. La présentation au format pdf
3. L'intégralité des fichiers sources développés pour le projet (fichiers .c et .h). Ces fichiers seront examinés pour vérifier que les programmes sont correctement écrits (structure du code, appels des fonctions, commentaires dans les fichiers, ...)

A l'issue du projet, chaque binôme ou monôme devra rédiger un rapport de maximum 10 pages qui doit contenir:

* une description du problème étudié ainsi que la modélisation retenue (ne pas oublier la bibliographie concernant les documents consultés)
* une explication des méthodes numériques utilisées et de l'algorithme général du code,
* une présentation de quelques résultats issus du code développé comprenant une analyse critique, une discussion et une interprétation des résultats.